

Hong Kong Mathematics Olympiad (2009 / 2010)

Final Event 1 (Individual)

香港數學競賽 (2009 / 2010)

決賽項目 1 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 把三個體積分別為 1, 8, 27 的正立方體，以面貼面的方法黏合起來。若 a 為所得的多面體的最小總表面積，求 a 的值。

Three cubes with volumes 1, 8, 27 are glued together at their faces. If a is the smallest possible surface area of the resulting polyhedron, find the value of a .

2. 已知 $f(x) = -x^2 + 10x + 9$ ，且 $2 \leq x \leq \frac{a}{9}$ 。若 b 是 f 的最大及最小值之差，求 b 的值。

Given that $f(x) = -x^2 + 10x + 9$, and $2 \leq x \leq \frac{a}{9}$. If b is the difference of the maximum and minimum values of f , find the value of b .

3. 已知 p 及 q 是整數，且 $pq = b$ 及 $p^2q + q^2p + p + q = 70$ 。若 $c = p^2 + q^2$ ，求 c 的值。

Given that p and q are integers with $pq = b$ and $p^2q + q^2p + p + q = 70$. If $c = p^2 + q^2$, find the value of c .

4. 在一個有 c 行的演奏廳中，每一行都比前一行多兩個座位。若中間的行有 64 個座位，這演奏廳共有多少個座位？

There are c rows in a concert hall and each succeeding row has two more seats than the previous row. If the middle row has 64 seats, how many seats does the concert hall have?

Hong Kong Mathematics Olympiad (2009 / 2010)

Final Event 2 (Individual)

香港數學競賽 (2009 / 2010)

決賽項目 2 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 若 a, p, q 是質數，且滿足 $a < p$ 及 $a + p = q$ ，求 a 的值。

If a, p, q are primes with $a < p$ and $a + p = q$, find the value of a .

2. 若 b 及 h 為正整數，且滿足 $b < h$ 及 $b^2 + h^2 = b(a + h) + ah$ ，求 b 的值。

If b and h are positive integers with $b < h$ and $b^2 + h^2 = b(a + h) + ah$, find the value of b .

3. 在一個 $(2b + 1) \times (2b + 1)$ 的棋盤上任意選取兩個不在同一橫行上方格。若 c 為選取的兩個不同方格的組合數目，求 c 的值。

In a $(2b + 1) \times (2b + 1)$ checkerboard, two squares not lying in the same row are randomly chosen.

If c is the number of combinations of different pairs of squares chosen, find the value of c .

4. 已知 $f(x) = c \left\lfloor \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right\rfloor$ ，其中 $\lfloor x \rfloor$ 是小於或等於實數 x 的最大整數。若 d 為 $f(x)$ 的最大值，求 d 的值。

Given that $f(x) = c \left\lfloor \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right\rfloor \right\rfloor$, where $\lfloor x \rfloor$ is the greatest integer less than or equal to the real number x . If d is the maximum value of $f(x)$, find the value of d .

Hong Kong Mathematics Olympiad (2009 / 2010)

Final Event 3 (Individual)

香港數學競賽 (2009 / 2010)

決賽項目 3 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 若 a 為 15147 的相異質因數的數目。求 a 的值。

If a is the number of distinct prime factors of 15147, find the value of a .

2. 若 $x + \frac{1}{x} = a$ 及 $x^3 + \frac{1}{x^3} = b$ ，求 b 的值。

If $x + \frac{1}{x} = a$ and $x^3 + \frac{1}{x^3} = b$, find the value of b .

3. 設 $f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{當 } x \text{ 是一奇數} \\ \frac{x}{2} & \text{當 } x \text{ 是一偶數} \end{cases}$ 。若 c 是一奇數及 $f(f(f(c))) = b$ ，求 c 的最小值。

Let $f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{when } x \text{ is an odd integer} \\ \frac{x}{2} & \text{when } x \text{ is an even integer} \end{cases}$. If c is an odd integer and $f(f(f(c))) = b$, find the least value of c .

4. 設 $f\left(\frac{x}{3}\right) = x^2 + x + 1$ 。若 d 為所有滿足 $f(3x) = c$ 的 x 之和，求 d 的值。

Let $f\left(\frac{x}{3}\right) = x^2 + x + 1$. If d is the sum of all x for which $f(3x) = c$, find the value of d .

Hong Kong Mathematics Olympiad (2009 / 2010)

Final Event 4 (Individual)

香港數學競賽 (2009 / 2010)

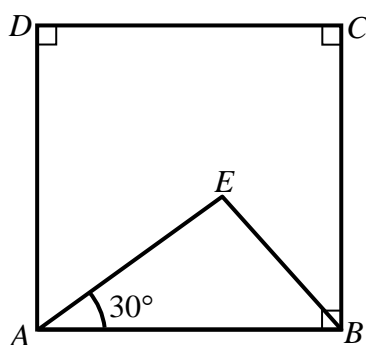
決賽項目 4 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

1. 在圖一中， $ABCD$ 為一正方形， E 為此正方形以外的一點及 $\angle EAB = 30^\circ$ 。若 $ABCD$ 的面積是 ABE 的面積的六倍，則 $AE : AB = a : 1$ 。求 a 的值。

In Figure 1, $ABCD$ is a square, E is a point outside of the square and $\angle EAB = 30^\circ$. If the area of $ABCD$ is six times that of ABE , then the ratio $AE : AB = a : 1$. Find the value of a .



圖一

Figure 1



2. 已知 $b = \frac{\log 8^a + \log 27^a + \log 125^a}{\log 9 + \log 25 + \log 2 - \log 15}$ ，求 b 的值。

Given that $b = \frac{\log 8^a + \log 27^a + \log 125^a}{\log 9 + \log 25 + \log 2 - \log 15}$, find the value of b .



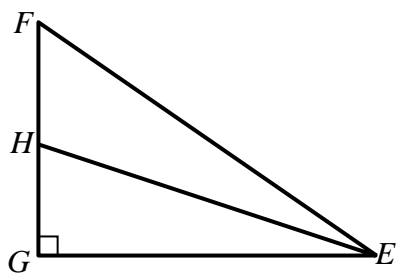
3. 設 c 為 $1^3 + 2^3 + \cdots + 2009^3 + 2010^3$ 除以 b^2 的餘數。求 c 的值。

Let c be the remainder of $1^3 + 2^3 + \cdots + 2009^3 + 2010^3$ divided by b^2 . Find the value of c .



4. 在圖二中， EFG 為一直角三角形。已知 H 為 FG 上的一點，使得 $GH:HF=4:5$ 及 $\angle GEH = \angle FEH$ 。若 $EG=c$ 及 $FG=d$ ，求 d 的值。

In Figure 2, EFG is a right-angled triangle. Given that H is a point on FG , such that $GH:HF=4:5$ and $\angle GEH = \angle FEH$. If $EG=c$ and $FG=d$, find the value of d .



圖二
Figure 2

